Собственные функции и собственные числа оператора Лапласа для треугольников

Автор: Бродников Александр Петрович
Email: chillugy@omsknet.ru
Homepage: http://chillugy.narod.ru

1 Введение

Точные значения собственных функций и собственных чисел для оператора Лапласа ранее были известны только для областей, ограниченных прямоугольником либо окружностью. В статье приведено решение данной проблемы для треугольных областей, углы в вершинах которого относятся друг к другу как целые числа. Это позволяет, в принципе, получить решение и для произвольного треугольника с любой заданной точностью.

2 Постановка задачи

Требуется найти решение уравнения Гельмгольца

$$\Delta F = -M^2 F, \quad \text{где } \Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1}$$

, при следующих граничных условиях:

$$F\Big|_{\Gamma} = 0 \qquad \text{на границе треугольной области } \Gamma \tag{2}$$

Решение существует только для определённых значений M, которые называются *собственными числами*. Конкретная функция F для некоторого значения M называется *собственной функцией*, соответствующей этому значению.

Общее решение (1) можно записать в виде:

$$F(x,y) = \int_0^{2\pi} \Omega(\theta) \sin\left\{M(x\cos\theta + y\sin\theta) + \chi(\theta)\right\} d\theta \tag{3}$$

, где $\Omega(\theta), \chi(\theta)$ - обобщённые функции.

3 Барицентрические координаты

Для треугольника $\triangle_{UVW}$ с координатами $U(x_u, y_u), V(x_v, y_v), W(x_w, y_w)$ определим его углы $\hat{U} = \angle U, \hat{V} = \angle V, \hat{W} = \angle W$ и барицентрические координаты u, v, w, как решение системы уравнений

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

, где для u, v, w выполняется дополнительное условие (5)

$$\boxed{\text{u+v+w=1}} \tag{5}$$

Обозначим $\hat{U} = \angle U, \hat{V} = \angle V, \hat{W} = \angle W$, имеем равенство

$$\boxed{\hat{U} + \hat{V} + \hat{W} = \pi} \tag{6}$$

Не теряя общности, можно положить

$$\hat{U} \leqslant \hat{V} \leqslant \hat{W} \tag{7}$$

Для вершин треугольника барицентрические координаты суть следующие

$$U(1,0,0), V(0,1,0), W(0,0,1)$$

Определим D и S:

$$D = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2S$$

Тогда барицентрические координаты u, v, w любой точки можно пересчитать по формулам

$$u = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x & x_v & x_w \\ y & y_v & y_w \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, v = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_u & x & x_w \\ y_u & y & y_w \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, w = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_u & x_v & x \\ y_u & y_v & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Определим l_u, l_v, l_w как длины сторон треугольника $\triangle_{UVW}$, расположенных соответственно против вершин U, V, W. Определим и вычислим далее производные и переменные $T_{\alpha\beta}$:

$$u'_x = \frac{y_v - y_w}{D}, \quad v'_x = \frac{y_w - y_u}{D}, \quad w'_x = \frac{y_u - y_v}{D}$$

$$u'_y = \frac{x_w - x_v}{D}, \quad v'_y = \frac{x_u - x_w}{D}, \quad w'_y = \frac{x_v - x_u}{D}$$

$$T_{uu} \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{l_u^2}{D^2}$$

$$T_{vv} \equiv \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \frac{l_v^2}{D^2}$$

$$T_{ww} \equiv \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \frac{l_w^2}{D^2}$$

$$T_{uv} \equiv \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{l_u l_v \cos \hat{W}}{D^2}$$

$$T_{uw} \equiv \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{l_u l_w \cos \hat{V}}{D^2}$$

$$T_{vw} \equiv \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{l_v l_w \cos \hat{U}}{D^2}$$

Коэффициенты треугольника $T_{\alpha\beta}$ связаны указанными далее зависимостями. Независимыми можно выбрать, к примеру, либо T_{uu}, T_{vv}, T_{ww}, либо T_{uu}, T_{vv}, T_{uv}.

$$T_{uu} = T_{vv} + T_{ww} + 2T_{vw}, T_{vv} = T_{uu} + T_{ww} + 2T_{uw}, T_{ww} = T_{uu} + T_{vv} + 2T_{uv}$$

$$T_{uu} + T_{uv} + T_{uw} = 0, \quad T_{uv} + T_{vv} + T_{vw} = 0, \quad T_{uw} + T_{vw} + T_{ww} = 0$$

$$T_{uu} + T_{vv} + T_{ww} + 2T_{uv} + 2T_{uw} + 2T_{vw} = 0$$

Обозначим R - радиус описанного вокруг треугольника окружности. Тогда имеем следующие равенства

$$\frac{l_u}{\sin \hat{U}} = \frac{l_v}{\sin \hat{V}} = \frac{l_w}{\sin \hat{W}} = 2R$$

$$l_u = 2R \sin \hat{U}, \quad l_v = 2R \sin \hat{V}, \quad l_w = 2R \sin \hat{W}$$

$$S = 2R^2 \sin \hat{U} \sin \hat{V} \sin \hat{W}$$

$$T_{uu} = \frac{1}{4R^2 \sin^2 \hat{V} \sin^2 \hat{W}}$$

$$T_{vv} = \frac{1}{4R^2 \sin^2 \hat{U} \sin^2 \hat{W}}$$

$$T_{ww} = \frac{1}{4R^2 \sin^2 \hat{U} \sin^2 \hat{V}}$$

$$T_{uv} = -\frac{\cos \hat{W}}{4R^2 \sin \hat{U} \sin \hat{V} \sin^2 \hat{W}}$$

$$T_{uw} = -\frac{\cos \hat{V}}{4R^2 \sin \hat{U} \sin^2 \hat{V} \sin \hat{W}}$$

$$T_{vw} = -\frac{\cos \hat{U}}{4R^2 \sin^2 \hat{U} \sin \hat{V} \sin \hat{W}}$$

Из (6) следует, что

$$\sin \hat{W} = \sin \hat{U} \cos \hat{V} + \sin \hat{V} \cos \hat{U}, \quad \cos \hat{W} = \sin \hat{U} \sin \hat{V} - \cos \hat{U} \cos \hat{V}$$

В дальнейшем будет несколько раз использована формула

$$a \sin \varphi + b \cos \varphi = \rho \sin (\varphi + \sigma)$$

, где

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{b}{a}, \quad \sin \sigma = \frac{b}{\rho}, \quad \cos \sigma = \frac{a}{\rho} \tag{8}$$

и её частные варианты

$$\sin \varphi + \operatorname{tg} \sigma \cos \varphi = \frac{1}{\cos \sigma} \sin (\varphi + \sigma)$$

$$\sin \varphi + \operatorname{ctg} \sigma \cos \varphi = \frac{1}{\sin \sigma} \cos (\varphi - \sigma)$$

4 Уравнение в барицентрических координатах

Используя перечисленные ранее формулы, (1) можно переписать в виде

$$\Delta F(u,v,w) \equiv T_{uu}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + T_{vv}\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + T_{ww}\frac{\partial^2 F}{\partial w^2} + \\ 2T_{uv}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + 2T_{uw}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial w} + 2T_{vw}\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial w} = -M^2 F \tag{9}$$

, а граничные условия (2) примут вид:

$$F(0,v,w) = F(u,0,w) = F(u,v,0) = 0 \tag{10}$$

Переменные (u,v,w) в (10) не являются свободными, так как связаны условием (5). На границе области, ограниченной $\triangle_{UVW}$, по крайней мере одна из них обращается в 0, а в совокупности, кроме (5), в пределах $\triangle_{UVW}$ связаны ещё и условиями

$$0 \leqslant (u,v,w) \leqslant 1$$

, т.е. на границе сумма двух отличных от 0 координат равна 1.

5 Вид решения

Учитывая (1), (3), (9) и (10), общее решение F будем искать в виде суммы частных решений f_i

$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i(u, v, w) \tag{11}$$

, где каждая частная функция f_i имеет вид

$$f_i(u, v, w) = \sin(A_i u + B_i v + C_i w) \tag{12}$$

Опуская нижние индексы в (12), выполним замены

$$\tilde{A} = A - C, \quad \tilde{B} = B - C$$

, затем, выбрав в качестве независимых T_{uu}, T_{vv}, T_{uv}, и используя (5), линейность лапласиана Δ, упростим формулы:

$$f = \sin(\tilde{A}u + \tilde{B}v + C)$$

$$\Delta f \equiv -(T_{uu}\tilde{A}^2 + T_{vv}\tilde{B}^2 + 2T_{uv}\tilde{A}\tilde{B})f = -M^2 f \tag{13}$$

Сокращая (13) на f, получаем

$$T_{uu}\tilde{A}^2 + T_{vv}\tilde{B}^2 + 2T_{uv}\tilde{A}\tilde{B} = M^2 \tag{14}$$

Каждая частная функция f_i удовлетворяет линейному уравнению (9) самостоятельно, сумма же их, равная F, должна удовлетворять граничным условиям (10).

6 Правила учёта граничных условий

Функция $F = \sum\limits_{i=1}^{n} \sin\left(\tilde{A}_i u + \tilde{B}_i v + C_i\right)$ должна обращаться в нуль, когда хотя бы одна из переменных u, v или w обращается в 0. Отсюда следуют формулы

$$F(u=0) \equiv \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\tilde{B}_i v + C_i\right) = 0, \quad \forall v \tag{15}$$

$$F(v=0) \equiv \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\tilde{A}_i u + C_i\right) = 0, \quad \forall u \tag{16}$$

Если $w = 0$, то $u + v = 1$, и, полагая $u = t + \frac{1}{2}$, $v = -t + \frac{1}{2}$, получим

$$F(w=0) \equiv \sum_{i=1}^{n} \sin\left\{\left(\tilde{A}_i - \tilde{B}_i\right) t + \frac{1}{2}\left(\tilde{A}_i + \tilde{B}_i\right) + C_i\right\} = 0, \quad \forall t \tag{17}$$

Введём обозначение

$$\Psi_i = \frac{1}{2}\left(\tilde{A}_i + \tilde{B}_i\right) + C_i$$

и выпишем следующие правила для учёта граничных условий

$$(\sin(\alpha t + \beta_1) + \sin(-\alpha t + \beta_2) \equiv 0, \quad \forall t) \Rightarrow \quad \beta_1 + \beta_2 = 2k\pi \tag{18}$$

$$(\sin(\alpha t + \beta_1) + \sin(\alpha t + \beta_2) \equiv 0, \quad \forall t) \Rightarrow \quad \beta_1 - \beta_2 = (2k+1)\pi \tag{19}$$

В формулах (18) и (19) k может пробегать весь ряд натуральных чисел: $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

Смысл правил (18) и (19) следующий: для того чтобы указанная сумма двух функций была бы тождественным нулём при любых t, достаточно выполнения соответствующего условия правой части правила.

7 Приведённый вид частного уравнения

Перепишем левую часть (14) в виде

$$T_{uu}\tilde{A}^2+T_{vv}\tilde{B}^2+2T_{uv}\tilde{A}\tilde{B} \equiv T_{uu}\left[\tilde{A}^2+\frac{\sin^2\hat{V}}{\sin^2\hat{U}}\tilde{B}^2-2\frac{\sin\hat{V}\cos\hat{W}}{\sin\hat{U}}\tilde{A}\tilde{B}\right] \quad (20)$$

Продолжая, имеем

$$(20)=T_{uu}\left[\tilde{A}^2-2\frac{\sin\hat{V}\cos\hat{W}}{\sin\hat{U}}\tilde{A}\tilde{B}+\frac{\sin^2\hat{V}\cos^2\hat{W}}{\sin^2\hat{U}}\tilde{B}^2+\right.$$
$$\left.\frac{\sin^2\hat{V}}{\sin^2\hat{U}}\left(1-\cos^2\hat{W}\right)\tilde{B}^2\right]$$

$$(20)=T_{uu}\left[\left(\tilde{A}-\frac{\sin\hat{V}\cos\hat{W}}{\sin\hat{U}}\tilde{B}\right)^2+\left(\frac{\sin\hat{V}\sin\hat{W}}{\sin\hat{U}}\right)^2\tilde{B}^2\right]=$$
$$T_{uu}\left(\hat{A}^2+\hat{B}^2\right)=M^2$$

, где $\hat{A},\hat{B}$ и $\tilde{A},\tilde{B}$ связаны зависимостями

$$\hat{A}=\tilde{A}-\frac{\sin\hat{V}\cos\hat{W}}{\sin\hat{U}}\tilde{B}, \quad \hat{B}=\frac{\sin\hat{V}\sin\hat{W}}{\sin\hat{U}}\tilde{B}$$

$$\tilde{A}=\hat{A}+\operatorname{ctg}\hat{W}*\hat{B}, \quad \tilde{B}=\frac{\sin\hat{U}}{\sin\hat{V}\sin\hat{W}}\hat{B}$$

Тогда $\exists\Phi,\exists\rho$ такие, что

$$\frac{\hat{A}}{M\rho}=\sin\Phi, \quad \frac{\hat{B}}{M\rho}=\cos\Phi \quad (21)$$

$$\rho=2R\sin\hat{V}\sin\hat{W}, \quad T_{uu}=\rho^2$$

и верны

$$\hat{A}=\rho M\sin\Phi, \quad \hat{B}=\rho M\cos\Phi$$

, удовлетворяющие уравнению (7).

Такой угол Φ будем называть *решающим* углом уравнений (21), (14), принадлежашим данному частному решению.

Приведём $\tilde{A}$ к более удобному виду

$$\tilde{A} = \rho M \left(\sin\Phi + \operatorname{ctg}\hat{W}\cos\Phi\right) = MR_1 \sin\left(\Phi + \sigma_1\right) \tag{22}$$

В (22) σ_1 должно удовлетворять

$$\operatorname{tg}\sigma_1 = \operatorname{ctg}\hat{W}$$

поэтому

$$\sigma_1 = \frac{\pi}{2} - \hat{W}, \quad R_1 = \frac{\rho}{\sin\hat{W}} = 2R\sin\hat{V} = l_v \tag{23}$$

Для $\tilde{B}$ имеем

$$\tilde{B} = \rho M \frac{\sin\hat{U}}{\sin\hat{V}\sin\hat{W}}\cos\Phi = MR_2\sin\left(\Phi + \sigma_2\right)$$

, где

$$\sigma_2 = \frac{\pi}{2}, \quad R_2 = 2R\sin\hat{U} = l_u \tag{24}$$

Для $\tilde{A} - \tilde{B}$ имеем

$$\tilde{A} - \tilde{B} = \rho M \left[\sin\Phi + \left(\operatorname{ctg}\hat{W} - \frac{\sin\hat{U}}{\sin\hat{V}\sin\hat{W}}\right)\cos\Phi\right] =$$
$$\rho M \left(\sin\Phi - \operatorname{ctg}\hat{V}\cos\Phi\right) = \rho M \left[\sin\Phi + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \hat{V}\right)\cos\Phi\right] =$$
$$\rho M \left(\sin\Phi + \operatorname{tg}\sigma_3\cos\Phi\right) = MR_3\sin\left(\Phi + \sigma_3\right)$$

Поскольку

$$\sin\hat{U} = \sin\left(\hat{V} + \hat{W}\right), \quad \frac{\sin\left(\hat{V} + \hat{W}\right)}{\sin\hat{V}\sin\hat{W}} = \operatorname{ctg}\hat{V} + \operatorname{ctg}\hat{W}$$

$$\left(\operatorname{ctg}\hat{W} - \frac{\sin\hat{U}}{\sin\hat{V}\sin\hat{W}}\right) = \operatorname{ctg}\hat{W} - \operatorname{ctg}\hat{V} - \operatorname{ctg}\hat{W} = -\operatorname{ctg}\hat{V} = \operatorname{tg}\sigma_3$$

, то для R_3, σ_3 имеем

$$R_3 = \frac{\rho}{\sin\hat{V}} = 2R\sin\hat{W} = l_w, \quad \sigma_3 = \frac{3\pi}{2} + \hat{V}$$

, где из двух вариантов для σ_3 выбран тот, который задаёт правильный знак согласно (8).

8 Стратегия построения решения

Пусть f_1 - частное решение уравнения (1), имеющее вид (12), 1-е слагаемое ряда (11)

$$f_1 \equiv \sin\left(\tilde{A}_1 u + \tilde{B}_1 v + C_1\right) = \tag{25}$$
$$\sin\left[R_1 M \sin(\Phi_1 + \sigma_1) u + R_2 M \sin(\Phi_1 + \sigma_2) v + C_1\right]$$

Уравнение (25) не удовлетворяет совокупности граничных условий (15), (16), (17) хотя бы потому, что не существует такого Φ_1, чтобы одновременно выполнялись равенства

$$\sin(\Phi_1 + \sigma_1) = 0, \quad \sin(\Phi_1 + \sigma_2) = 0, \quad \sin(\Phi_1 + \sigma_3) = 0$$

Следовательно, если и существует решение в виде суммы (11), это должна быть сумма нескольких слагаемых. Чтобы подавить ненулевое слагаемое $\sin(\Phi_{i_1} + \sigma_1)$, нужно подобрать такой угол Φ_{i_2}, чтобы либо

$$\sin(\Phi_{i_1} + \sigma_1) = \sin(\Phi_{i_2} + \sigma_1) \tag{26}$$

, либо

$$\sin(\Phi_{i_1} + \sigma_1) = -\sin(\Phi_{i_2} + \sigma_1) \tag{27}$$

В случае (26) используется правило (19), где

$$\alpha = \sin(\Phi_{i_1} + \sigma_1), \quad \beta_1 = C_{i_1}, \quad \beta_2 = C_{i_2} \tag{28}$$

В случае (27) используется правило (18) с той же формулой (28). Для подавления $\sin(\Phi_{i_1} + \sigma_1)$ используется та же формула (28) с заменой σ_1 на σ_2. Для подавления $\sin(\Phi_{i_1} + \sigma_3)$ используется та же формула (28) с заменой σ_1 на σ_3, β_1 на Ψ_{i_1}, β_2 на Ψ_{i_2}.

Правила (18) и (19) приводят к системе линейных уравнений, которая будет совместной только при определённых значениях M_k. Но решать такую систему современная математика умеет только в случае её конечности. Для конкретного $\triangle_{UVW}$ и любого Φ_{i_1} несложно найти такой Φ_{i_2}, чтобы подавить один из $\sin(\Phi_{i_1} + \sigma_j), j = 1, 2, 3$, а тогда появятся неподавленные слагаемые для Φ_{i_2}. Для произвольного $\triangle_{UVW}$, с любыми углами $\angle U, \angle V, \angle W$ процесс бесконечен, но если хотя бы два из углов треугольника рационально эквивалентны π, то процесс добавления Φ_{i_j} заканчивается на некотором шаге. Это есть следствие периодичности тригонометрических функций. Угол $\angle U$ рационально эквивалентен π, если существуют такие целые числа a_u, b_u, что

$$\hat{U} = \frac{a_u}{b_u}\pi$$

Ввиду (6) третий угол $\triangle_{UVW}$ также рационально эквивалентен π, если это свойство выполняется для двух других углов.

Вычислим n - максимальное число слагаемых. Пусть целые числа $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ таковы, что

$$\tilde{u} : \tilde{v} : \tilde{w} = \hat{U} : \hat{V} : \hat{W}, \quad \text{Н.О.Д}(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) = 1$$

, где Н.О.Д - наименьший общий делитель, а Н.О.К - наименьшее общее кратное.

Тогда

$$n = \text{Н.О.К}(2, \tilde{u} + \tilde{v} + \tilde{w})$$

Число 2 появляется из-за знаменателя $\frac{\pi}{2}$ в (23), (24), (25). Формулы для вычисления углов треугольника

$$\angle U = \frac{\pi\tilde{u}}{\tilde{u} + \tilde{v} + \tilde{w}}, \quad \angle V = \frac{\pi\tilde{v}}{\tilde{u} + \tilde{v} + \tilde{w}}, \quad \angle W = \frac{\pi\tilde{w}}{\tilde{u} + \tilde{v} + \tilde{w}}$$

Зная углы, можно вычислить их синусы, а зная R, вычислить стороны и тем самым полностью построить $\triangle_{UVW}$.

9 Построение карты рассчитанных треугольников

Пока (2006) общей формулы для расчёта собственных чисел и собственных функций уравнения (1) с граничными условиями (2) найти не удалось, поэтому имеет смысл начать составление карты рассчитанных треугольников. Можно начать с минимального значения $\tilde{u}+\tilde{v}+\tilde{w}$, учитывая (7). Начало списка треугольников имеет вид (после знака = приведена сумма коэффициентов пропорции):

$$1:1:1=3,\quad 1:1:2=4,\quad 1:1:3=5,\quad 1:2:2=5,\quad 1:1:4=6,$$
$$1:2:3=6,\quad 1:1:5=7,\quad 1:2:4=7,\quad 1:3:3=7,\quad 2:2:3=7$$

Далее приведены примеры рассчитанных треугольников.

9.1 Равносторонний треугольник

Равносторонний треугольник - это одновременно равноугольный треугольник, ему соответствует пропорция углов $1:1:1$. Имеет две серии решений. Вычислим его константы, считая заданным R.

$$\hat{U} = \hat{V} = \hat{W} = \frac{\pi}{3}, \quad a \equiv l_u = l_v = l_w = R_1 = R_2 = R_3 = R\sqrt{3},$$
$$D = 2R^2\sqrt{3}, \quad T \equiv T_{uu} = T_{vv} = T_{ww} = \frac{1}{4R^2},$$
$$T_{uv} = T_{uw} = T_{vw} = -\frac{1}{8R^2},$$
$$\sigma_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \sigma_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \sigma_3 = -\frac{\pi}{6}$$

Серия 1. Подберём 3 таких угла Φ_i, чтобы $\sin(\Phi + \sigma_i) = 0$ и составим таблицу всего из трёх строк, соответствующим этим углам. Напоминаем, что каждое частное решение, соответствующее Φ_i, имеет вид

$$f_i = \sin\left(\tilde{A}_i u + \tilde{B}_i v + C_i\right)$$

, где $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i$ вычисляются через Φ_i.

Запишем матрицу из коэффициентов частных решений

№	Φ	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$	$\tilde{A} - \tilde{B}$	Ψ
1	$-\frac{\pi}{6}$	0			
2	$\frac{\pi}{2}$		0		
3	$\frac{\pi}{6}$			0	

, а затем начнём заполнять пустые места, вычисляя значения

№	Φ	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$	$\tilde{A} - \tilde{B}$	Ψ
1	$-\frac{\pi}{6}$	0	$Ma\sin\frac{\pi}{3}$	$-Ma\sin\frac{\pi}{3}$	
2	$\frac{\pi}{2}$	$Ma\sin\frac{\pi}{3}$	0	$Ma\sin\frac{\pi}{3}$	
3	$\frac{\pi}{6}$	$Ma\sin\frac{\pi}{3}$	$Ma\sin\frac{\pi}{3}$	0	

Здесь была использована формула

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$$

В каждом из столбцов $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{A} - \tilde{B}$ легко находятся пары с совпадающими либо противоположными по знаку значениями. Из пары $(\tilde{A}_2, \tilde{A}_3)$, используя (19) и полагая

$$\alpha = Ma\sin\frac{\pi}{3}, \quad \beta_1 = C_2, \quad \beta_2 = C_3$$

, получаем

$$C_2 - C_3 = (2k_1 + 1)\pi$$

Из пары $(\tilde{B}_1, \tilde{B}_3)$, используя (19) и полагая

$$\alpha = Ma\sin\frac{\pi}{3}, \quad \beta_1 = C_1, \quad \beta_2 = C_3$$

, получаем

$$C_1 - C_3 = (2k_2 + 1)\pi$$

Наконец, из пары $(\tilde{A}_1 - \tilde{B}_1, \tilde{A}_3 - \tilde{B}_3)$, используя (18) и полагая

$$\alpha = Ma\sin\frac{\pi}{3}, \quad \beta_1 = \Psi_1, \quad \beta_2 = \Psi_2$$

, получаем

$$\Psi_1 + \Psi_2 = 2k_3\pi$$

, где $\Psi_1 = \frac{1}{2}Ma\sin\frac{\pi}{3} + C_1$, $\Psi_2 = \frac{1}{2}Ma\sin\frac{\pi}{3} + C_2$.

Коэффициенты C_i, с одной стороны, имеют значения $mod(2\pi)$; с другой стороны, позволяя им принимать значения при различных k_j, можно получить весь ряд собственных чисел и собственных значений. Поэтому сначала берутся во внимание их общие значения, до вычисления M в виде функции от целочисленных индексов k_j, затем эти значения обрезаются по $mod(2\pi)$ без потери общности.

Выпишем выражение для F полностью.

$$F(u,v,w) = \sin\left(Ma\sin\frac{\pi}{3}v + C_1\right) + \sin\left(Ma\sin\frac{\pi}{3}u + C_2\right) + \sin\left(Ma\sin\frac{\pi}{3}u + Ma\sin\frac{\pi}{3}v + C_3\right) \tag{29}$$

Полагая в (29) $F(u=0)=0, F(v=0)=0, F(w=0)=0$, получим остальные зависимости для C_i

$$\sin C_1 = 0, \quad \sin C_2 = 0, \quad \sin\left(Ma\sin\frac{\pi}{3} + C_3\right) = 0$$
$$C_1 = k_4\pi, \quad C_2 = k_5\pi$$

Отсюда несложно получить

$$M_k a \sin\frac{\pi}{3} = 2k\pi, \quad k = 1, 2, 3\ldots$$

и от остальных k_j можно отказаться, а C_i - обрезать по $mod(2\pi)$. Выделим выражение для M_k

$$M_k = \frac{2k\pi}{a\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{4\sqrt{3}k\pi}{3a}$$

, здесь a - длина стороны равностороннего треугольника.

Для C_i возможны два варианта решения

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \pi \tag{30}$$

$$C_1 = \pi, \quad C_2 = \pi, \quad C_3 = 0 \tag{31}$$

В случае (30) решение записывается в виде

$$F(u, v, w) = \sin 2k\pi u + \sin 2k\pi v + \sin\left(2k\pi(u+v) + \pi\right) \tag{32}$$

В случае (31) решение отличается только множителем, что для собственных функций несущественно. Отметим ещё несколько эквивалентных выражений для решения

$$F(u, v, w) = \sin\left(k\pi(v+w-u)\right) + \sin\left(k\pi(w+u-v)\right) + \sin\left(k\pi(u+v-w)\right)$$

$$F(u, v, w) = \sin 2k\pi u + \sin 2k\pi v + \sin 2k\pi w \tag{33}$$

$$F(u, v, w) = \sin k\pi u \sin k\pi v \sin k\pi w \tag{34}$$

Выражение (33) является аддитивной функцией трёх синусов, а (34) - мультипликативной функцией трёх синусов.

Серия 2. Число углов Φ_i равно 6. Каждое частное решение f_i формируется из строки следующей матрицы

№	Φ	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$	$\tilde{A}-\tilde{B}$	Ψ
1	Φ	S_1	S_3	$-S_5$	
2	$\Phi+\dfrac{2\pi}{6}$	S_3	S_5	S_1	
3	$\Phi+\dfrac{4\pi}{6}$	S_5	$-S_1$	S_3	
4	$-\Phi$	S_5	S_3	$-S_1$	
5	$-\Phi+\dfrac{2\pi}{6}$	S_3	S_1	S_5	
6	$-\Phi+\dfrac{4\pi}{6}$	S_1	$-S_5$	S_3	

, где

$$S_1 = Ma\sin\left(\Phi+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$S_3 = Ma\sin\left(\Phi+\frac{3\pi}{6}\right)$$
$$S_5 = Ma\sin\left(\Phi+\frac{5\pi}{6}\right), \quad S_3 = S_1+S_5$$

Выпишем совокупность полученных уравнений, связывающих свободные члены частных решений

$$C_1-C_6=(2k_1+1)\pi,\ C_2-C_5=(2k_2+1)\pi,\ C_3-C_4=(2k_3+1)\pi \tag{35}$$
$$C_1-C_4=(2k_4+1)\pi, \quad C_2+C_6=2k_5\pi, \quad C_3+C_5=2k_6\pi \tag{36}$$
$$\Psi_1+\Psi_5=2k_7\pi, \quad \Psi_2+\Psi_4=2k_8\pi, \quad \Psi_3-\Psi_6=(2k_9+1)\pi \tag{37}$$

Поскольку

$$\Psi_1=\frac{S_1+S_3}{2}+C_1, \quad \Psi_2=\frac{S_3+S_5}{2}+C_2$$
$$\Psi_3=\frac{S_5-S_1}{2}+C_3, \quad \Psi_4=\frac{S_3+S_5}{2}+C_4$$
$$\Psi_5=\frac{S_1+S_3}{2}+C_5, \quad \Psi_6=\frac{S_1-S_5}{2}+C_6$$

, то (37) следует переписать в виде

$$S_1 + S_3 + C_1 + C_5 = 2k_7\pi \tag{38}$$
$$S_3 + S_5 + C_2 + C_4 = 2k_8\pi \tag{39}$$
$$S_5 - S_1 + C_3 - C_6 = (2k_9 + 1)\pi \tag{40}$$

Для решения достаточно положить

$$C_1 = 0 \text{ или } \pi,$$
$$S_1 = \frac{2\pi(2N_1 - N_2)}{3}, \quad S_5 = \frac{2\pi(2N_2 - N_1)}{3}, \quad S_3 = \frac{2\pi(N_1 + N_2)}{3}$$

, где N_1, N_2 - целые числа, и тогда

$$F(u,v) = \sin(S_1u + S_3v + C_1) + \sin(S_3u + S_5v + \pi - C_1) + \tag{41}$$
$$\sin(S_5u - S_1v + C_1) + \sin(S_5u + S_3v + \pi + C_1) +$$
$$\sin(S_3u + S_1v + C_1) + \sin(S_1u - S_5v + \pi + C_1)$$

Вычисляя (13) для каждого слагаемого в (41), убеждаемся в том, что

$$M = \frac{\sqrt{3}\pi}{3R}\sqrt{N_1^2 + N_2^2 - N_1N_2} = \frac{\pi}{a}\sqrt{N_1^2 + N_2^2 - N_1N_2}$$

Здесь F, M являются соответственно семейством собственных функций и семейством собственных значений, зависящих от целочисленных параметров N_1, N_2.

9.2 Равнобедренный прямоугольный треугольник

Равнобедренный прямоугольный треугольник имеет пропорцию углов $1:1:2$. Вычислим его константы, считая заданным R.

$$\hat{U} = \hat{V} = \frac{\pi}{4}, \quad \hat{W} = \frac{\pi}{2}, \quad a \equiv l_u = l_v = R_1 = R_2 = \frac{R\sqrt{2}}{2},$$
$$c = l_w = 2R, \quad R_3 = R, \quad D = a^2, \quad T_{uu} = T_{vv} = \frac{1}{4a^2}, \quad T_{uv} = 0,$$
$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \sigma_3 = -\frac{\pi}{4}$$

Число углов Φ_i равно 4. Каждое частное решение f_i формируется из строки следующей матрицы

№	Φ	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$	$\tilde{A}-\tilde{B}$	Ψ
1	Φ	S_1	S_2	S_3	
2	$\Phi+\frac{\pi}{2}$	S_2	$-S_1$	S_4	
3	$-\Phi$	$-S_1$	S_2	$-S_4$	
4	$-\Phi+\frac{\pi}{2}$	S_2	S_1	$-S_3$	

, где

$$S_1 = Ma\sin\Phi, \quad S_2 = Ma\sin\left(\Phi+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$S_3 = MR\sin\left(\Phi-\frac{\pi}{4}\right), \quad S_4 = MR\sin\left(\Phi+\frac{\pi}{4}\right)$$

Имеем далее

$$C_1 + C_3 == 2k_1\pi, \quad C_2 - C_4 = (2k_2+1)\pi, \quad C_1 - C_3 = (2k_3+1)\pi,$$
$$C_2 + C_4 = 2k_4\pi, \quad \Psi_1 + \Psi_4 = 2k_4\pi, \quad \Psi_2 + \Psi_3 = 2k_5\pi$$

и решение имеет следующий вид

$$F(u,v) = \sin(S_1u + S_2v + C_1) + \sin(S_2u - S_1v + C_2) +$$
$$\sin(-S_1u + S_2v + C_3) + \sin(S_2u + S_1v + C_4)$$

, где N_1, N_2 - целые числа, а C_i округляются по $mod(2\pi)$:

$$S_1 = N_1\pi, \quad S_2 = N_2\pi, \quad M = \frac{\pi\sqrt{N_1^2 + N_2^2}}{2a},$$
$$C_1 = \frac{\pi}{2} + (k_1 + k_3)\pi, \quad C_2 = \frac{\pi}{2} + (k_2 + k_4)\pi,$$
$$C_3 = -\frac{\pi}{2} + (k_1 - k_3)\pi, \quad C_4 = -\frac{\pi}{2} + (k_4 - k_2)\pi$$

Поскольку для равнобедренного прямоугольного треугольника можно отождествить координаты $u = x, v = y$, далее приведён пример решения в переменных x, y

$$F(x, y) = \sin\left(N_1\pi x + N_2\pi y + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(N_2\pi x - N_1\pi y + \frac{\pi}{2}\right) +$$
$$\sin\left(-N_1\pi x + N_2\pi y - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(N_2\pi x + N_1\pi y - \frac{\pi}{2}\right)$$

Фунция $F(x, y)$ есть собственная функция уравнения (1), где

$$M^2 = \pi^2\left(N_1^2 + N_2^2\right)$$

, N_1, N_2 - произвольные целые числа, а треугольник $\triangle_{XYZ}$ имеет координаты $(0, 0), (2, 0), (0, 2)$.

10 Требуется аннотация на английском

Буду весьма признателен читателю, который напишет за меня краткую аннотацию этой статьи на английском языке, которым я почти не владею. Поместить её можно на домашней странице http://chillugy.narod.ru, либо в гостевой, либо на форуме. Только не забудьте написать своё имя и фамилию на русском и английском, чтобы я мог поместить правильную благодарность.